MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Section A2 (P')

Prévoir une feuille de papier millimétré par candidat

Dans tout le problème, les lettres x, y, z, t désignent des variables réelles parcourant l'intervalle $]0, +\infty[$ tandis que les lettres u, v, w désignent des variables réelles parcourant l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

La lettre e désigne comme d'habitude la base des logarithmes népériens.

Les courbes demandées au I.1° et II.5° seront tracées sur une même feuille de papier millimétré; on utilisera les valeurs approchées suivantes :

$$e = 2{,}72, \qquad e^{-1} = 0{,}37$$

I

1° Soit f la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$. Calculer f' et f''.

Étudier les variations de f et donner l'allure de son graphe (on notera Ox, Ou les axes et on prendra l'unité égale à 1 cm sur Ox et à 3 cm sur Ou).

2° Soit φ la fonction réciproque de la restriction de f à l'intervalle $]0, e]$. Quel est son intervalle de définition?

On désigne par θ la fonction composée $\varphi \circ f$. Que vaut $\theta(x)$ pour $x \leqslant e$? Montrer que, pour $x > e$, $\theta(x)$ est l'unique nombre $z \neq x$ tel que l'on ait $x^z = z^x$.

3° *a.* Montrer que, pour tout $x \neq e$, θ est dérivable et que

$$\theta'(x) = \frac{\theta^2(x)\,(1 - \ln x)}{x^2\,[1 - \ln \theta(x)]}$$

b. Montrer, en s'aidant du développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage du point $x = e$, que $e - \theta(x)$ est équivalent à $x - e$ quand x tend vers e par valeurs supérieures à e. En déduire la valeur de $\lim_{x > e,\, x \to e} \theta'(x)$; la fonction θ est-elle dérivable au point $x = e$?

4° Montrer que, pour u appartenant au domaine de définition de φ, le nombre $w = u\varphi(u)$ vérifie l'égalité $w = ue^w$.

5° On admet qu'il existe une série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n u^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que $\varphi(u)$ en soit la somme pour $|u| < R$. Le reste de cette partie I va être consacré au calcul des a_n.

Soit $(u, v) \longrightarrow F(u, v)$ une fonction de classe C^∞, définie dans un voisinage ouvert D de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, telle que $w = F(u, v)$ soit solution de l'équation

$$w = v + u\,e^w$$

et que l'on ait $u\,\varphi(u) = F(u, 0)$ pour u parcourant un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ (on sait qu'une telle fonction F existe d'après le résultat du 4° et le théorème des fonctions implicites).

a. Montrer que l'on a dans D

$$\frac{\partial F}{\partial u} = e^F \frac{\partial F}{\partial v}$$

et que, de manière générale, on a dans D, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{\partial^n F}{\partial u^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial v^{n-1}} \left[e^{nF} \frac{\partial F}{\partial v} \right]$$

Que vaut $e^{nF} \dfrac{\partial F}{\partial v}$ au point $(0, v)$?

b. Montrer, en s'aidant de l'étude de $u \to F(u, 0)$ au voisinage du point $u = 0$, que le nombre a_n défini ci-dessus est égal à

$$\frac{(n+1)^n}{(n+1)!}$$

et calculer le rayon de convergence R.

II

1° Soit a la fonction définie par $a(1) = 1$ et, pour $t \neq 1$,

$$a(t) = \frac{t \ln t}{t - 1}$$

. . . / . . .

a. On pose $t = 1 + h$. Donner le développement en série entière de la fonction $h \longrightarrow a(1 + h)$, et son rayon de convergence.

b. Montrer que $a'(1)$ existe et donner sa valeur.

c. Montrer que a est une bijection croissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

2° *a.* Montrer que, pour tout $t > 1$, on a $2 \ln t < t - \frac{1}{t}$.

b. En déduire que, pour $t \neq 1$, on a $a(t)\, a\left(\frac{1}{t}\right) < 1$.

3° Soit b la fonction $t \longmapsto a(t)\, e^{a\left(\frac{1}{t}\right)}$.

a. Que vaut $b'(1)$? Montrer que, pour $t \neq 1$, on a

$$b'(t) = \frac{e^{a\left(\frac{1}{t}\right)}}{t - 1}\left[1 - a(t)\, a\left(\frac{1}{t}\right)\right]$$

b. Étudier les variations de b. Montrer que l'on a

$$\lim_{t \to +\infty} [b(t) - \ln t] = 0$$

4° On désigne par C l'ensemble des couples (x, y) vérifiant

$$y^{(y^x)} = x$$

Montrer que C contient le graphe de la fonction $x \to e^{f(x)}$ où f est la fonction définie au I.1°.

5° *a.* Montrer, en posant $y^x = t\,x$, que l'ensemble des $(x, y) \in C$ tels que $y^x \neq x$ admet la représentation paramétrique

$$x(t) = e^{-a(t)}, y(t) = e^{-b(t)}$$

quand t parcourt $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
Montrer que, pour $t = 1$, le point obtenu appartient encore à C.

b. Dessiner, à l'aide des études de fonctions faites précédemment, l'ensemble des couples $(\ln x, \ln y)$ quand (x, y) parcourt C (on notera $O\xi$, $O\eta$ les axes sur lesquels on prendra l'unité égale à 1 cm. On mettra en évidence les points correspondant à $x = \frac{1}{e}$, 1, e et les tangentes horizontales. On ne cherchera pas une grande précision dans le tracé, en particulier dans celui des branches infinies).

6° Donner, en s'aidant du dessin fait au 5° *b.*, le nombre de racines x de l'équation $y^{(y^x)} = x$ en fonction de y.